Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________________

Carné: ______________ Sección: _____

MA-2112 Abril-Julio 2012

1^{er} Examen Parcial (50 %) **Tipo A**

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es esta función diferenciable en el origen?

(12 puntos)

Solución:

Comenzamos calculando, por definición, las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Usando la definición de diferenciabilidad, debemos ver:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\right|}{||(x,y)-(0,0)||} = 0.$$

Esto es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} = 0$$

pero acercándonos por la recta $y = x$ nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Pregunta 2. Dada la función $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 + 6y$, calcule la ecuación del plano tangente a la gráfica de f que es paralelo a $x + y + z = 1$.

(12 puntos)

Solución:

Sea $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 3 - x^2 - y^2 + 6y - z = 0$. Así, $\nabla F(x,y,z) = (-2x, -2y+6, -1)$.

Si (x_0, y_0, z_0) es el punto de la gráfica donde el plano tangente es paralelo a $x + y + z = 1$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \lambda(1,1,1)$, es decir $(-2x, -2y+6, -1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$.

La ecuación vectorial es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} -2x_0 &= \lambda \\ -2y_0 + 6 &= \lambda \\ -1 &= \lambda \end{aligned}$$

Así, $\lambda = -1, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{7}{2}, \quad z_0 = 3 - x_0^2 - y_0^2 + 6y_0 = \frac{23}{2}$.

Luego la ecuación del plano tangente es:

$$\nabla F\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{23}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{7}{2}, z - \frac{23}{2}\right)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{7}{2}\right) - \left(z - \frac{23}{2}\right) = 0$$

$$x + y + z = \frac{31}{2}.$$

Pregunta 3. Consideremos la función $z = f(x,y)$ dada implicitamente por

$$F(x,y,z) = xyz - e^z = 0.$$

Verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(p) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(p)$ en el punto $p = (e^2, \frac{1}{2}, 2)$.

(13 puntos)

Solución:

Vemos que efectivamente $F(e^2, \frac{1}{2}, 2) = e^2 - e^2 = 0$.

Usando derivación implicita nos queda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{yz}{xy - e^z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{xz}{xy - e^z},$$

Evaluando en p:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(p) = \frac{(\frac{1}{2})(2)}{\frac{1}{2}e^2 - e^2} = 2e^{-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(p) = -\frac{2e^2}{\frac{1}{2}e^2 - e^2} = 4,$$

Calculando las derivadas implicitas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{yz}{xy - e^z}\right) = -\frac{(xy - e^z)\left(y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right) - yz\left(x - e^z\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(xy - e^z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(p) = -4e^{-2}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{xz}{xy - e^z}\right) = -\frac{(xy - e^z)z - xyz}{(xy - e^z)^2} - \left[\frac{(xy - e^z)x + xze^z}{(xy - e^z)^2}\right]\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= \frac{(xy - e^z)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) - xz\left(y - e^z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(xy - e^z)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(p) = -4e^{-2}.$$

Así nos obtenemos la igualdad que buscabamos.

Pregunta 4. Halle las dimensiones del paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

.

(13 puntos)

Solución:

Por la simetría del problema, podemos restringirnos al primer octante. Sea (x, y, z) el vértice del paralelepípedo sobre el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el primer octante.

La función a maximizar sera $f(x,y,z) = xyz$ bajo la restricción $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Como el dominio de f es un conjunto cerrado y acotado (compacto), entonces tenemos garantizada la existencia de máximos y mínimos para f.

Podemos suponer además que $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, pues si alguno es 0, nos queda $f = 0$, lo que nos da el valor mínimo para la función.

Usando el método de multiplicadores de Lagrange nos queda que si en (x,y,z) se alcanza un valor extremo, entonces$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$, esto es $(yz, zx, xy) = (\lambda \frac{2x}{a^2}, \lambda \frac{2y}{b^2}, \lambda \frac{2z}{c^2})$

Ahora, despejando λ, he igualando las tres ecuaciones nos queda

$$\frac{a^2yz}{2x} = \frac{b^2zx}{2y} = \frac{c^2xy}{2z}$$

De la primera igualdad obtenemos, $a^2y^2 = b^2x^2$, es decir $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$.

De la segunda igualdad obtenemos, $b^2z^2 = c^2y^2$, es decir $\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

Así, $3\frac{x^2}{a^2} = 3\frac{y^2}{b^2} = 3\frac{z^2}{c^2} = 1$, es decir $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

En este punto entonces f alcanza un máximo, y los lados del paralelepipedo serán de tamaño:

$$\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$$